CENTRE DE GESTION DE LA FONCTION PUBLIQUE TERRITORIALE
DE MARTINIQUE

# CONCOURS INTERNE D'INGENIEUR TERRITORIAL
# SESSION 2015

Mercredi 17 juin 2015

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE APPLIQUÉES

Durée : 4 heures
Coefficient : 3

**Les parties mathématiques et physique seront composées sur des copies distinctes.
Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, mais en indiquant le numéro de chaque question.
Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.**

### A LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET

- Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni votre numéro de convocation, ni signature ou paraphe.
- Aucune référence (nom de collectivité, nom de personne, ...) **autre que celles figurant le cas échéant sur le sujet ou dans le dossier** ne doit apparaître dans votre copie.
- Seul l'usage d'un stylo à encre soit noire, soit bleue est autorisé (bille non effaçable, plume ou feutre). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou pour souligner, sera considérée comme un signe distinctif, de même que l'utilisation d'un surligneur.
- Seules les représentations graphiques pourront être réalisées au crayon à papier.
- L'utilisation d'une calculatrice de fonctionnement autonome et sans imprimante est autorisée
- Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.
- Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

**Ce sujet comprend 5 pages
Il appartient au candidat de vérifier que le document comprend le nombre de pages indiqué**
*S'il est incomplet, en avertir le surveillant*

**Les détails des calculs doivent figurer sur la copie**

**Tout résultat non justifié sera considéré comme nul**

## MATHÉMATIQUES : 10 points

### PROBLÈME 1 (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

On note $f$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1;e_2;e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est la matrice A.

**Question 1**

On considère le vecteur $u = e_1 - e_2 + e_3$

Calculer $f(u)$. (On écrira le détail des calculs sur la copie.)

**Question 2**

Déterminer les valeurs propres de $A$. Cette matrice est-elle inversible ? (Justifier la réponse.)

**Question 3**

Trouver une base de chaque sous - espace propre.

**Question 4**

Justifier que l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

Donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$

**Question 5**

On considère le système différentiel $(S)$ : $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$

où $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose alors pour tout réel $t$ : $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t)$

a) Démontrer que $X$ est solution du système $(S)$ si et seulement si Y est solution d'un système différentiel $(S_1)$ que vous expliciterez.

b) Résoudre le système $(S_1)$.

On posera $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ où $y_1$, $y_2$, $y_3$ sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire la solution générale du système $(S)$.

**PROBLÈME 2 (5 points)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité 4 cm, on considère la courbe $\Gamma$ dont une représentation paramétrique est donnée par : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}$ avec $-\pi \leq t \leq \pi$

**Question 1**

Factoriser le trinôme $P(x) = 2x^2 + x - 1$

**Question 2**

Ecrire les coordonnées du point $M(-t)$.
En déduire que la courbe $\Gamma$ possède un axe de symétrie que vous préciserez.
Sur quel intervalle I suffit - il alors d'étudier les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ ?

**Question 3**

Dresser le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle I.

**Question 4**

On admet qu'au point $E(\pi)$ la tangente à la courbe $\Gamma$ est dirigée par le vecteur $\vec{i}$.
Tracer la courbe $\Gamma$ sur la feuille de papier millimétré fournie.
On précisera et on tracera les tangentes aux points A et B de paramètres respectifs 0 et $\frac{\pi}{3}$

**Question 5**

Établir que pour tout réel $t$ on a : $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$

**Question 6**

On rappelle que l'aire d'un domaine D borné du plan délimité par une courbe $\Gamma$ orientée dans le sens positif est donnée, en unités d'aire, par l'intégrale curviligne : $\frac{1}{2}\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$

Calculer en cm$^2$ l'aire du domaine D délimité par la courbe $\Gamma$.
On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 0,1 cm$^2$ près.

## PHYSIQUE : 10 points

### PROBLÈME 1 : ÉLECTRICITÉ (4,5 points)

Un circuit R,L,C série est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace u =230 V sous une fréquence f=50hz.

Questions

a. Exprimer sous forme complexe puis calculer :
   - l'impédance du circuit
   - la valeur du Cos $\varphi$
   - l'intensité consommée par le circuit

b. Calculer les puissances active, réactive et apparente du circuit.

c. On ajoute en parallèle au condensateur C un second condensateur C'.
   Déterminer la valeur de cette nouvelle capacité C' afin de rendre l'impédance du circuit résistive.
   En déduire la nouvelle valeur de l'intensité, ainsi que la puissance apparente.

**DONNÉES**
R = 10 Ω
C = 30 µF
L = 30mH

### PROBLÈME 2 : TRANSFERT DE CHALEUR (2,5 points)

Un morceau de fer de 400g à la température $\theta$ est plongé dans un récipient contenant 350 g dont la température est à 19°C. A l'équilibre on constate que la température du récipient est à 22 °C. On ne tiendra pas compte des pertes liées à l'environnement extérieur.

Questions

a. Calculer la quantité d'énergie Q1 reçue par l'eau.

b. A l'équilibre, donner la relation liant Q1 à Q2.

c. En déduire la température $\theta$ du morceau de fer.

**DONNÉES**
Masse volumique de l'eau : $1000 kg.m^{-3}$
$C_{eau} = 4180\ J.Kg^{-1}.C^{-1}$
$C_{fer} = 440\ J.Kg^{-1}.C^{-1}$

**PROBLÈME 3 : HYDRAULIQUE (3 points)**

Une conduite hydraulique reliée à un barrage de retenue entraine en contre bas une turbine couplée à un alternateur, afin de produire de l'électricité.
On négligera les pertes en charges.

Questions

a. On mesure une vitesse de 5m/s à l'entrée de la turbine (E), en déduire le débit puis calculer la pression en E

b. Calculer l'énergie fournie à la turbine en négligeant la vitesse en sortie (S) de celle ci, puis en déduire la puissance hydraulique fournie à la turbine.

c. Déterminer la puissance produite par l'alternateur

**DONNÉES**

Masse volumique de l'eau : $1000 kg.m^{-3}$
Diamètre de la conduite Ø = 1,2m
Rendement de la turbine 0,6
Rendement de l'alternateur 0,8
Pression atmosphérique $1.10^5$ Pa
$g = 9{,}81 ms^{-2}$
$V_s = 0$